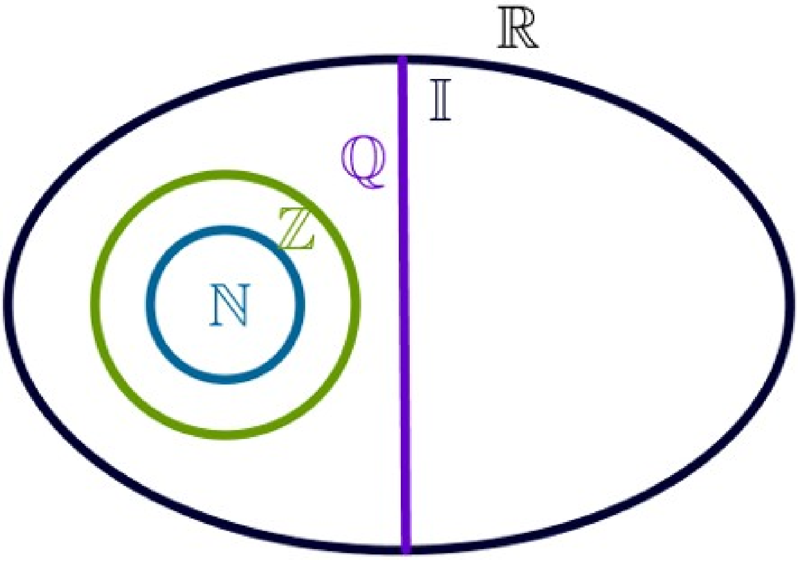
2

Números reales. Logarítmos

1. Conjuntos de números



Ejercicios:

1. Completa la siguiente tabla con Sí/No según los números pertenezcan o no al conjunto correspondiente:

	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real	No real
$-1,45$						
$\frac{-8}{2}$						
$-\sqrt{100}$						
$1,010010001...$						
$-\frac{1}{4}$						
$3,401\hat{7}$						
$4\sqrt{7}$						
$7\sqrt{-4}$						
$\pi-\sqrt{2}$						

2. Clasifica los siguientes números:

(a) $-\sqrt[3]{-2,5}$ (c) $-3,1415$ (e) $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (g) $4-\sqrt{10}$ (i) $\frac{-5}{7}$

(b) $-\frac{10}{-2}$ (d) $-\sqrt[3]{-8}$ (f) $1,02333...$ (h) $-\sqrt{2-\pi}$ (j) $\frac{\pi}{2}$

2. Intervalos

Distintas formas de expresar un conjunto de números reales comprendido entre dos números

Ejemplos:

Con palabras	Gráficamente	Con un intervalo	Con desigualdades
Números reales entre 2 y 5 ambos incluidos.			
Números reales entre -3 y -1 sin incluir.			
Números reales entre -8 y -3 incluyendo al -8.			
Números reales entre -4 y 3 incluyendo al 3.			
Números reales mayores o iguales que 3			
Números reales mayores que -2			
Números reales menores que 2			
Números reales menores o iguales que 4			

Ejercicios:

3. Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalo:
   (a) Posibles notas de un examen aprobado.
   (b) Posibles notas de un examen suspenso.
   (c) Números reales comprendidos entre -3 y 4, ambos incluidos.
   (d) Números reales mayores que 7.
   (e) Números reales menores o iguales que -5.
   (f) Distancia mayor de 5 km.
   (g) Distancia no mayor de 5 km.
4. Expresa los siguientes intervalos de forma gráfica y empleando desigualdades:

A = $(-3, 4)$ B = $(-2, 0]$ C = $[1, 8]$

D = $[-3, 5)$ E = $(-\infty, 3)$ F = $(-\infty, 3]$

G = $(2, +\infty)$ H = $[-4, \infty)$ I = $(-\infty, \infty)$

5. Expresa las siguientes expresiones de forma gráfica y con intervalos:

(a) $-2 \leq x < 5$

(c) $-1 \leq t \leq 5$

(e) $-2 \leq y$

(b) $-2 < x < \infty$

(d) $x < 3$

(f) $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$

Unión e intersección de intervalos

Ejemplos:

Gráficamente

Conjunto $A = (-6, 4)$

Conjunto $B = [-3, 8)$

Conjunto $A \cap B =$

Conjunto $A \cup B =$

Ejercicios:

6. Con los conjuntos siguientes, calcula las intersecciones de A y B, A y C, D y E, D y H, E y G. Calcula también las uniones de A y G, B y C, C y D, E y H.

A = $(-3, 4)$ B = $(-2, 0]$ C = $[1, 8]$ D = $[-3, 5)$

E = $(-\infty, 3)$ F = $(-\infty, 3]$ G = $(2, +\infty)$ H = $[-4, \infty)$ I = $(-\infty, \infty)$

3. Valor absoluto

Ejercicios:

7. Escribe sin valor absoluto:

   (a) $|-900| =$ (b) $|-\sqrt{5}| =$ (c) $|7-\sqrt{50}| =$ (d) $|4-\sqrt{50}+\pi| =$

8. Halla el valor de x en los siguientes casos:

   (a) $|x| = 4$ (b) $|x-1| = 3$ (c) $|2-x| = -3$ (d) $|5-2x| = 6$

4. Errores y aproximaciones

Ejercicios:

9. Determina el error absoluto y el error relativo en las siguientes aproximaciones. ¿A qué cifra se ha realizado la aproximación?

   (a) $102345 \approx 100000$ (b) $3,4509 \approx 3,5$ (c) $290012 \approx 290000$

10. Determina una cota del error absoluto y el error relativo en las siguientes aproximaciones.

    (a) $\pi \approx 3,1415$ (b) $\dfrac{22}{7} \approx 3$ (c) $\sqrt{3} \approx 1,732$

11. Unos técnicos están asfaltando una calle de 50 metros de largo pero se quedan sin material cuando les faltan 2 metros para acabar. Por otro lado, también se está asfaltando una autovía de 50 km de largo que une la ciudad con la playa más cercana. También en esta ocasión, debido a un error de previsión, se quedan sin material cuando les faltaban 20 metros para acabar. ¿Cuáles han sido los errores cometidos en ambos casos? ¿En qué caso te parece que se ha realizado una peor provisión de los materiales? ¿Por qué?

5. Notación científica

Ejercicios:

12. Escribe en notación científica:

(a) 752 000 000 (c) 0,0000512 (e) 0,0000007 (g) 15 000

(b) $32 \cdot 10^5$ (d) $75 \cdot 10^{-4}$ (f) $0,03 \cdot 10^6$ (h) $0,0025 \cdot 10^{-5}$

13. Calcula y expresa la solución tanto en forma científica como en forma desarrollada (sin calculadora):

(a) $\dfrac{37\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{2 \cdot 10^{49}}$

(b) $\dfrac{0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00123}{0,2 \cdot 10^{-49} \cdot 10000}$

(c) $\dfrac{23 \cdot 10^{-12} \cdot 1,04 \cdot 10^{-30} : (1,04 \cdot 10^{-20})}{0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 04}$

Ejercicios:

14. Escribe en notación científica usando la calculadora:

(a) 75 000 000 (c) 0,00002303 (e) 0,00002077 (g) 55 000

(b) $0,032 \cdot 10^5$ (d) $75 \cdot 10^{-4}$ (f) $10,03 \cdot 10^6$ (h) $0,003455 \cdot 10^{-5}$

15. Calcula y expresa la solución tanto en forma científica como desarrollada (con calculadora):

(a) $\dfrac{37\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{2 \cdot 10^{29}}$

(b) $\dfrac{0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00123}{0,2 \cdot 10^{-29} \cdot 10000}$

(c) $\dfrac{23 \cdot 10^{-3} \cdot 1,04 \cdot 10^{-30} : (1,04 \cdot 10^{-20})}{0,000\ 000\ 000\ 04}$

(d) $30067 + 23,1 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^6$

(e) $-45000 \cdot 10^{23} - 3,67 \cdot 10^{26} + \dfrac{3}{4} \cdot 10^{27}$

6. Investigaciones en el conjunto de los números reales

Ejercicios:

16. Determina para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:

(a) $\sqrt{x-8}$

(c) $\sqrt{10-x}$

(b) $\sqrt{-3x}$

(d) $\sqrt{x^2+4}$

(e) $\sqrt{-1-x^2}$

17. Busca información sobre los números algebraicos y trascendentales.

18. Busca información sobre:

(a) Rectángulos áureos: Cómo se construyen, condición matemática que cumplen, ejemplos de uso a lo largo de la historia y en la actualidad, otras propiedades: espiral de Durero.

(b) Espiral equiangular o geométrica.

(c) Sucesión de Fibonacci.

7. Logaritmos. Definición y cálculo

Equivalencia entre logaritmos y potencias:

$$\log_b P = n$$

$$P = b^n$$

Otras equivalencias que ya conocías:

Multiplicación y división:

$$a : b = c$$

$$a = b \cdot c$$

Suma y resta:

$$a - b = c$$

$$a = b + c$$

Potencia y raíz:

$$a^n = P$$

$$a = \sqrt[n]{P}$$

Ejemplos A: Cálculo del logaritmo escribiéndolo como potencia (sin calculadora)

Ejemplos B: Cálculo del argumento del logaritmo escribiéndolo como potencia (sin calculadora)

Ejemplos C: Cálculo de la base del logaritmo escribiéndolo como potencia (sin calculadora)

Ejercicios:

19. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora:

(a) $\log_2 16 = x$

(b) $\log_9 1 = x$

(c) $\log_4 64 = x$

(d) $\log_3 3^{-4} = x$

(e) $\log_2 0,25 = x$

(f) $\log_3 (1/9) = x$

(g) $\log 0,001 = x$

(h) $\log_3 27^{-2} = x$

(i) $\log 0,1 = x$

(j) $\log_7 49 = x$

(k) $\log_5 0,04 = x$

(l) $\log_6 (1/216) = x$

20. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora

(a) $\log_2 x = 3$

(b) $\log x = -2$

(c) $\log_2(2x-5) = 5$

(d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

(e) $\log_{\sqrt[4]{3}} x = 2$

(f) $\log_2(x^2-3) = -3$

(g) $\log_2 x = 8$

(h) $\log_3(x+4) = 3$

(i) $\log_3(2x-3)^2 - 2 = 0$

21. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora:

(a) $\log_x 1000 = 3$

(b) $\log_x 64 = 2$

(c) $\log_x 64 = 6$

(d) $\log_x 5 = 2$

(e) $\log_x 700 = 4$

(f) $\log_x 2 = -4$

(g) $\log_x 50 = -2$

(h) $\log_{x+1} 8 = 2$

(i) $\log_{x-1} 32 = -2$

<u>**Logaritmos con la calculadora:**</u>

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\log a}{\log b}$$

Ejercicios:

22. Halla el valor de x en los siguientes casos. Usa la calculadora para obtener una aproximación a las centésimas de la solución cuando ésta incluya expresiones logarítmicas::

(a) $\log_2 60 = x$

(b) $\log 43000 = x$

(c) $\log_9 60 = x$

(d) $\ln 5 = x$

(e) $5^{4-x} = 125$

(f) $2^{2x-3} - 4 = 0$

(g) $2 \cdot 7^x = 11$

(h) $3^{2+x} = 172$

(i) $2 \cdot (5^{x-3} + 1) = 9$

8. Propiedades de los logaritmos

Ejemplos de aplicación de las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\log_a X + \log_a Y &= \log_a (XY) \\
\log_a X - \log_a Y &= \log_a \tfrac{X}{Y} \\
k \cdot \log_a X &= \log_a X^k \\
\log_a a &= 1 \\
\log_a 1 &= 0 \\
\log_a a^n &= n
\end{aligned}$$

Ejercicios:

23. Usa las propiedades de los logaritmos para expandir al máximo las siguientes expresiones:

(a) $\log_a XY$

(b) $\log_2 \dfrac{X^2}{2Y}$

(c) $2\log_3 \dfrac{\sqrt{X}}{9Y}$

(d) $\log_a \dfrac{a}{XY}$

(e) $\log \dfrac{X^2}{100Y}$

(f) $8\log_a \sqrt{\dfrac{a^2X}{Y^2}}$

24. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$; $\log_5 B = 2,4$; $\log_2 C = 3,5$ y $\log_2 D = -1,4$; calcula el valor de las siguientes expresiones de forma exacta:

(a) $\log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$

(b) $\log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

(c) $\log_2 \dfrac{CD}{4}$

(d) $\log_2 \dfrac{2\sqrt{C}}{D^3}$

9. Inicio a las ecuaciones con logaritmos

Ejercicios:

25. Resuelve las siguientes ecuaciones con logaritmos:

(a) $\log_2(x+2) - 2 = \log_2 3x$

(b) $\log(3x+1) - \log(2x-3) = 0$

(c) $\log(10x^2 + 3x - 6) - 2\log x = 1$

(d) $\log_3(2x-5) - \log_3 7 - 2 = 0$

26. Determina la relación entre las variables x, y, z sin usar logaritmos en los siguientes casos:

(a) $\log y = x + \log 7$

(b) $\log_2 y = 2 - \log_2 x$

(c) $\log z = 2 - \log x - \dfrac{1}{2}\log y$

10. Problemas con logaritmos.

27. El número de personas que utiliza internet en una ciudad viene dado por la relación $N = 1,9^x$; donde x es el número de meses y N el número de personas en miles. ¿Cuándo se alcanzarán los 5000 internautas? ¿Y los 10000?

28. Una población de conejos crece según la ley $P = 50 \cdot 1,02^t$ donde t es el tiempo en días. ¿Qué población habrá pasados 60 días? ¿Con cuántos individuos se inició la población? ¿Cuántos días tendremos que esperar para que la población alcance los 500 conejos?

29. En biología y otras disciplinas se utiliza a menudo el modelo logarítmico $n = k \log A$ que relaciona el número de especies (n) que viven en una región de área A km^2; donde k es una constante que depende del tipo de región. Sabemos, que en una región, el modelo es concretamente $n = 5,6 \cdot \log A$. ¿Cuántas especies habrá en un área de 500 kilómetros cuadrados? ¿Qué área tendría que tener aproximadamente para albergar a 4000 especies?

30. Una expresión matemática que permite relacionar la Magnitud de las ondas superficiales (M) con la energía liberada E (en ergios), es la obtenida por Gutemberg y Richter (1956):

$$\log E = 11,8 + 1,1M$$

A partir de esta relación, ¿qué cantidad de energía libera un terremoto de magnitud 5 (M=5)?

La bomba atómica lanzada sobre Hiroshima en 1945 liberó una energía de $E = 8,9 \cdot 10^{20}$ ergios. ¿A qué magnitud equivale esta cantidad en la escala Ritcher?

31. La escala de pH se usa para indicar si una sustancia es ácida o alcalina (básica). Se calcula midiendo el potencial de los iones de hidrógeno contenidos en una sustancia. La fórmula para calcular el pH de una solución acuosa es definida por UC Davis como ”el negativo del logaritmo de la concentración de iones de hidrógeno”. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$pH = -\log(H^+)$$

donde H+ es la concentración de iones de hidrógeno medido en moles por litro. Sabiendo que el agua destilada, tiene un pH = 7 en esta escala (neutro), determina la concentración de iones de hidrógeno del agua destilada.

Por otro lado, el jugo de limón, tiene una concentración de cationes de Hidrógeno (H+) 100.000 veces mayor que el agua pura. ¿Cuál es el pH del jugo de limón?

Finalmente, en el laboratorio se ha obtenido una disolución cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0, 0000000000666 moles por litro. ¿Cuál es su pH?

32. El flujo de intensidad I en un transistor t segundos después de apagar la radio viene dado por la siguiente ecuación:

$$I = I_0 \cdot 2^{-0.02t} \quad amps$$

Donde I_0 denota la intensidad antes de apagar la radio.

(a) Si 2 segundos después de apagar la radio la intensidad es de 1 amp, ¿cuál era la corriente inicial?

(b) ¿Cuánto tiempo es necesario para que la intensidad de corriente disminuya al 40% de la inicial?

FICHA DE REPASO

1. Clasifica los siguientes números:

   (a) $-3,1415$ (b) $-\frac{10}{-2}$ (c) $-\sqrt{2-\pi}$

2. Escribe sin valor absoluto y reduce cuando sea posible. Clasifica los números obtenidos.

   (a) $|3-\sqrt{5}| =$ (b) $|7-\sqrt{50}| =$ (c) $1-|5-\sqrt{3}-\sqrt{14}| =$

3. Expresa los siguientes subconjuntos como intervalos, de forma gráfica y empleando desigualdades:

   A = $(-3,4)$ B = $(-\infty,3]$ C = $\{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \leq -3\}$

4. Determina la unión y la intersección de los conjuntos anteriores.

5. Una fábrica ha de producir 2500 botes de conserva, pero por falta de un material necesario para la fabricación puede producir solo 2400. En otra fábrica, se tenían que producir 600 vasos de cristal, pero por un error del operario se producen 100 vasos más de lo previsto. ¿Cuáles han sido los errores cometidos en ambos casos? ¿En qué caso te parece que el error es más importante? ¿Por qué?

6. Calcula y expresa la solución tanto en forma científica como en forma desarrollada:

   (a) $\dfrac{765\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{2,5 \cdot 10^{45}}$

   (b) $\dfrac{0,000\ 000\ 000\ 02}{0,7 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-29} : (2,5 \cdot 10^{-20})}$

7. Halla el valor de x en los siguientes casos:

(a) $\log_5 0,04 = x$

(f) $\log_3 x = -2$

(b) $\log_x 2 = -4$

(g) $3^{2+x} = 172$

(c) $\log_9 1 = x$

(h) $\log_7 49 = x$

(d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

(i) $\log_x 5 = 2$

(e) $\log_x 64 = 4$

(j) $\log_2(2x - 5) = 5$

8. Usa las propiedades de los logaritmos para expandir al máximo las siguientes expresiones:

(a) $\log 1000X^2$

(b) $\log_a \dfrac{a^2}{2X}$

9. El flujo de intensidad I en un transistor t segundos después de apagar la radio viene dado por la siguiente ecuación:

$$I = 1.2 \cdot 2^{-0.3t} \quad amps$$

(a) ¿Cuál es la intensidad 2 segundos después de apagar la radio?

(b) ¿Cuál es la intensidad antes de apagar la radio?

(c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir aproximadamente desde que se apaga la radio para que la intensidad de corriente disminuya sea 0,42 amperios?