

3

Polinomios y fracciones algebraicas

1. Polinomios. Expresiones algebraicas.
2. Operaciones básicas con polinomios.
3. Identidades entre polinomios. Identidades notables. Potencias.
4. División de polinomios por el método de Ruffini.
5. División de polinomios por el método tradicional.
6. Valor numérico. Divisibilidad entre polinomios. Raíces de un polinomio.
7. Teorema del resto.
8. Factorización de polinomios por el método de Ruffini.
9. Factorización de polinomios usando el factor común e identidades notables.
10. Factorización de polinomios usando la ecuación de segundo grado.
11. Factorización de polinomios usando la ecuación bicuadrada.
12. Proceso general para factorizar polinomios.
13. Cuestiones sobre polinomios.
14. Fracciones algebraicas. Equivalencia y simplificación.
15. Suma y resta de fracciones algebraicas.
16. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.
17. Operaciones combinadas con fracciones algebraicas.

1. Polinomios. Expresiones algebraicas

Ejercicios:

1) Dados los siguientes polinomios, determina su grado, término independiente y coeficiente principal:

(a) $3x^4 + 3x - 1$

(d) $x^4 + 8x^2 + 5x$

(g) $3x - \frac{x^5}{2} + x^2$

(b) $-x^2 + 4x$

(e) $t^3 + 7t^5 - 4$

(h) $1 - 3x + 5x^8$

(c) $\frac{3}{4}x^3 + \frac{4}{5}x + 8$

(f) $\frac{3x^2 + x + 5}{2}$

(i) $\frac{1}{2} - \frac{t - 3t^2}{5}$

2) Traduce al lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:

(a) El cociente entre dos números pares consecutivos.

(b) Un número menos su inverso.

(c) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.

(d) La suma de los inversos de los números consecutivos.

3) Expresa mediante un polinomio el perímetro de un rectángulo en el que la base es 3 unidades mayor que la altura.

6) Expresa mediante un polinomio el volumen de una pirámide de base un cuadrado de lado 2 unidades mayor que su altura.

4) Idem para el área.

7) De una cartulina cuadrada de 30 cm de lado, recortamos un cuadrado de lado x en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x .

5) Expresa mediante un polinomio el volumen de un ortoedro de base un cuadrado y su altura es de 8 unidades.

2. Operaciones básicas con polinomios.

Ejercicios:

8) Sean los polinomios: $A(x) = 3x^2 + x - 4$, $B(x) = 2 - 3x^2$, $C(x) = 3x$ y $D(x) = 3x^2 + 2$.
Efectúa las operaciones indicadas a continuación:

(a) $A(x) + B(x) =$

(e) $A(x) - B(x) =$

(b) $A(x) - 3B(x) =$

(f) $C(x) \cdot D(x) =$

(c) $B(x) \cdot D(x) =$

(g) $(3x - 1) \cdot A(x) =$

(d) $A(x) - C(x) \cdot D(x) =$

(h) $A(x) \cdot B(x) - 2 \cdot C(x) \cdot D(x)$

9) Qué polinomio hay que sumar a $A(x) = 3x^2 - 3x + 7$ para obtener $B(x) = x^3 + x - 1$.

10) Qué polinomio hay que restar a $A(x) = 4x^2 - x + 7$ para obtener $B(x) = x^2 - 1$.

3. Identidades entre polinomios. Identidades notables. Potencias

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejercicios:

11) Si $A(x) = ax^2 + 3x - 4$, $B(x) = -x^2 + bx - c$ y $C(x) = 3x^2 + 7x - 8$, qué tienen que valer a , b y c para que $A(x) + B(x) = C(x)$.

12) Si $A(x) = x^2 + ax - 4$, $B(x) = -bx^2 + 5x - c$ y $C(x) = 3x^2 + 7x - 8$, qué tienen que valer a , b y c para que $A(x) - B(x) = C(x)$.

13) Sean los polinomios: $A(x) = 3x^2 + x - 4$, $B(x) = 2 - 3x$, $C(x) = 2 + 3x$ y $D(x) = 3x^2 + 2$.
Efectúa las operaciones indicadas a continuación:

(a) $B(x) \cdot C(x) =$

(e) $B(x) \cdot D(x) =$

(b) $(3x^2 - 2) \cdot D(x) =$

(f) $D(x)^2 =$

(c) $(x + 1) \cdot C(x)^2 =$

(g) $C(x)^2 - 3A(x) + C(x) =$

(d) $1 - 2x \cdot (x + 1) \cdot D(x) =$

(h) $B(x) \cdot (2 + 3x^2) + C(x)^2 =$

4. División de polinomios por el método de Ruffini

Ejercicios:

14) Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones usando el método de Ruffini:

(a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 1)$

(e) $(4x^3 - 6x^2 + x - 7) : (x + 1)$

(b) $(4x^3 - 8x^2 + 10) : (x - 4)$

(f) $(4x^4 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$

(c) $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (x - 3)$

(g) $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (-x + 2)$

(d) $(4x^3 - 6x^2 + 7) : (x + 2)$

(h) $(4x^3 + 7x + 9) : (-x - 5)$

5. División de polinomios por el método general

Ejercicios:

15) Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

(a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 + 1)$

(d) $(4x^3 - 6x^2 + 7) : (-x^2 + 3x - 1)$

(b) $(4x^3 - 8x^2 + 10) : (2x^2 - 1)$

(e) $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (x^2 + 2x)$

(c) $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (2x^2 - 3x + 1)$

(f) $(4x^3 + 7x + 9) : (2x - 5)$

16) Realiza la comprobación de la división en cada apartado del ejercicio anterior.

6. Valor numérico. Divisibilidad. Raíces de un polinomio.

Ejercicios:

17) Halla los siguientes valores numéricos:

(a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ Halla $A(2)$

(d) $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$ Halla $D(-1)$

(b) $B(x) = 4x^3 - 8x^2 + 10$ Halla $B(-2)$

(e) $E(x) = 4x^3 - 6x^2 + x - 7$ Halla $E(-2)$

(c) $C(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7$ Halla $C(1)$

(f) $F(x) = 4x^4 - 2x^2 - 3x + 1$ Halla $F(0)$

18) Determina cuál de los siguientes valores es raíz de los siguientes polinomios:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -2$$

(a) $A(x) = x^3 + 2x^2$

(c) $C(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

(b) $B(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

(d) $D(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

7. Teorema del resto.

Ejercicios:

19) Sin efectuar la división, halla el resto al dividir los siguientes polinomios entre $(x - 2)$:

(a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

(c) $C(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7$

(b) $B(x) = 4x^3 - 8x^2 + 10$

(d) $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$

20) Sin efectuar la división, halla el resto al dividir los siguientes polinomios entre $(x + 2)$:

(a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

(c) $C(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7$

(b) $B(x) = 4x^3 - 8x^2 + 10$

(d) $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$

21) Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

22) Sabiendo que el resto de la división $(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ es -8 , ¿qué vale k ?

23) Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

24) Determina si existe relación de divisibilidad alguno de los polinomios $(x - 3)$ y $(x + 1)$, y los siguientes:

(a) $x^3 - 3x^2 + x - 3$

(b) $x^3 + 4x - 11x - 30$

(c) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 13$

25) Halla todos los divisores de la forma $(x - a)$ con $a \in \mathbb{Z}$ de los siguientes polinomios:

(a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

(c) $x^4 - 10x^2 + 9$

(d) $x^2 - 5x + 4$

8. Factorización de polinomios por el método de Ruffini

Ejercicios:

26) Factoriza usando el método de Ruffini:

(a) $x^2 - 7x + 6 =$

(b) $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 =$

(c) $3x^3 + 9x^2 - 12x - 36 =$

(d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 =$

(e) $-2x^3 + x^2 + 8x - 4 =$

(f) $2x^4 - 20x^2 + 18 =$

(g) $2x^2 - 5x + 3 =$

(h) $x^3 + 3x^2 - x - 3 =$

(i) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 =$

(j) $-5x^3 + 3x^2 + 20x - 12 =$

(k) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 =$

(l) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

9. Factorización usando factor común e identidades notables

Ejercicios:

27) Factoriza sacando factor común:

(a) $x^2 - x =$

(b) $3x^3 - 6x^2 =$

(c) $12x^4 - 24x^3 =$

(d) $2x^3 + x =$

(e) $x^3 + x^2 =$

(f) $2x^3 + x^2 + 4x =$

28) Factoriza usando identidades notables (expresa la solución sin fracciones):

(a) $x^2 - 9 =$

(b) $4x^2 - 1 =$

(c) $9x^2 - 25 =$

(d) $x^2 - 2 =$

(e) $x^2 - 6x + 9 =$

(f) $x^2 + 8x + 16 =$

(g) $2x^2 - 1$

(h) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(i) $4x^2 + 4x + 1 =$

(j) $4x^2 + 12x + 9 =$

(k) $9x^2 - 12x + 4 =$

(l) $x^2 - 6xy + 9y^2 =$

10. Factorización usando la ecuación de segundo grado

Ejercicios:

29) Factoriza, cuando sea posible, usando la ecuación de segundo grado (expresa la solución sin fracciones):

(a) $x^2 - 5x + 4 =$

(g) $2x^2 + 3x + 1 =$

(b) $x^2 - 4x + 3 =$

(h) $-4x^2 - 3x + 1 =$

(c) $x^2 - 2x + 4 =$

(i) $6x^2 - 5x - 21 =$

(d) $x^2 + 3x + 2 =$

(j) $x^2 + 2x - 2 =$

(e) $2x^2 - x + 3 =$

(k) $3x^2 - 2x + 7 =$

(f) $3x^2 + 5 =$

(l) $x^2 + 2x - 1 =$

11. Factorización usando la ecuación bicuadrada

www.matematico.es 2021-2022

Ejercicios:

30) Factoriza y determina las raíces usando la ecuación bicuadrada:

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

(d) $x^4 - 10x^2 + 9 =$

(g) $x^4 - 3x^2 + 2 =$

(b) $x^4 + x^2 - 2 =$

(e) $4x^4 - 5x^2 + 1 =$

(h) $x^4 - 7x^2 + 10 =$

(c) $x^4 + 4x^2 + 3 =$

(f) $9x^4 - 10x^2 + 1 =$

(i) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

12. Factorización. Proceso general

- (1) Si está parcialmente factorizado, continuar la factorización con cada factor.
- (2) Factor común
- (3) Identidades notables, ecuación de segundo grado o bicuadrada.
- (4) Método de Ruffini hasta obtener un polinomio al que aplicar un método de factorización del punto (2).

Ejercicios:

31) Factoriza y determina las raíces de los siguientes polinomios (expresa la solución sin fracciones):

(a) $12x^5 - 36x^4 + 27x^3 =$

(b) $4x^2 - 8x + 3 =$

(c) $x^3 - x + 6 =$

(d) $10x^4 - 3x^3 - 41x^2 + 12x + 4 =$

(e) $3x^2 + 2x - 8 =$

(f) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16 =$

(g) $3x^5 - 48x =$

(h) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x =$

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 12 =$

(j) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 =$

32) Completa la siguiente descomposición de polinomios:

(a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) =$

(b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) =$

(c) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 4) =$

(d) $(3x^2 - 4x + 1)(6x^2 + 9x) =$

13. Cuestiones sobre polinomios

Ejercicios:

33) Escribe en cada apartado un polinomio de coeficientes enteros con las raíces indicadas:

(a) $7y - 7$

(b) $-2y - 3$

(c) 0 (doble) y -1

(d) 2 (doble) y -3 (doble)

34) Escribe en cada apartado un polinomio de coeficientes enteros con las raíces indicadas:

(a) $x_1 = 4, x_2 = -2$ y $x_3 = 0$ (doble)

(b) $x_1 = -\frac{1}{4}$ y $x_2 = -1$ (triple)

(c) $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = -3$ y $x_4 = 0$

(d) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{3}$ y $x_4 = 0$

35) Escribe en cada apartado un polinomio con las características indicadas:

(a) De segundo grado sin raíces.

(b) De segundo grado con dos raíces dobles.

(c) De tercer grado siendo 0 raíz doble.

(d) De cuarto grado sin raíces.

(e) De tercer grado con una raíz simple.

(f) De tercer grado con una raíz triple.

36) Halla el m.c.m. y el m.c.d. de los siguientes polinomios:

(a) $x^2 - 1$ y $(x + 1)^2$

(b) $x^2 + x$ y $x^2 - x$

(c) $x^3 - x$ y $x^2 - 1$

(d) $x^2 + 1$ y x^2

(e) $x^2 - 9$ y $x^2 - 6x + 9$

(f) $x + 4$ y $x^2 + x - 12$

(g) $x^2 - 3x + 2$ y $x^2 - 4x + 3$

(h) $x^2 - 1$ y $x^2 - 4$

14. Fracciones equivalentes. Simplificación de fracciones.

Ejercicios:

37) Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes:

$$(a) \frac{1}{x} \text{ y } \frac{x}{x^2}$$

$$(d) \frac{1}{x-1} \text{ y } \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$(g) \frac{x-3}{x^2-3x} \text{ y } \frac{x}{x^2}$$

$$(b) \frac{-1}{x} \text{ y } \frac{-(x+1)}{x(x+1)}$$

$$(e) \frac{1}{x+1} \text{ y } \frac{2x}{2x^2+2x}$$

$$(h) \frac{x^3-x}{x^3+x^2} \text{ y } \frac{3x-3}{3x}$$

$$(c) \frac{x}{x-1} \text{ y } \frac{x-1}{x}$$

$$(f) \frac{x^2+1}{x^3+x} \text{ y } \frac{1}{x}$$

$$(i) \frac{x+4}{x^2+x-12} \text{ y } \frac{1}{x-3}$$

38) Simplifica las siguientes fracciones:

$$(a) \frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$$

$$(b) \frac{2x^2 - 6x}{4x^3 - 2x}$$

$$(c) \frac{x^2 + 25 - 10x}{x^2 - 25}$$

$$(d) \frac{(x^2 - 9)^2(x^2 - x)}{(x - 3)^2x^2(x - 1)}$$

$$(e) \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2}$$

$$(f) \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$(g) \frac{x^2 - 1}{x - x^2}$$

$$(h) \frac{2x - x^2}{x^2 + x - 6}$$

$$(i) \frac{(x - 3)^2x(x + 3)}{(x - 3)x^2(x + 2)}$$

$$(j) \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - x^2 - 14x + 24}$$

15. Suma y resta de fracciones algebraicas

Ejercicios:

39) Reduce a común denominador y opera:

$$(a) \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} =$$

$$(b) \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} =$$

$$(c) \frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 =$$

$$(d) \frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} =$$

$$(e) \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} =$$

$$(f) \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} =$$

$$(g) \frac{x+2}{3} - \frac{x}{x+1} =$$

$$(h) \frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} =$$

$$(i) \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} =$$

$$(j) \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x} =$$

$$(k) x + \frac{1}{x} - \frac{x^3-2}{x^2-2x} =$$

$$(l) \frac{x+3}{x-2} - \frac{3x^2+8}{x^2-4} =$$

$$(m) \frac{2x}{x+2} - \frac{3x-6}{x^2-4} =$$

$$(n) \frac{x+2}{2x^2} - \frac{x-1}{6x} - \frac{x+3}{3x^2} =$$

16. Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Ejercicios:

40) Opera y simplifica cuando sea posible:

$$(a) \frac{5x - 10}{x + 3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x - 2} =$$

$$(b) \frac{2x + 1}{2x - 1} : \frac{x^2}{4x - 2} =$$

$$(c) \frac{x}{3} \cdot \frac{2x + 1}{x - 1} =$$

$$(d) \frac{1}{x - 1} : \frac{x + 1}{3x} =$$

$$(e) \frac{2}{x - 1} \cdot \frac{x}{x + 1} =$$

$$(f) \frac{2x}{2x - 3} : \frac{x + 1}{2x + 3}$$

17. Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

Ejercicios:

41) Opera y simplifica cuando sea posible:

$$(a) \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{x}{2} =$$

$$(b) \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x} =$$

$$(c) \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$(d) \frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} =$$

$$(e) \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) : \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] \cdot (x-1) =$$

$$(f) \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1} \right) =$$

$$(g) \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} =$$

$$(h) \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} =$$