1

Radicales

1) Fracciones. Decimales. Calculadora.
2) Potencias.
3) Radicales. Notación. Primeras propiedades.
4) Radicales equivalentes. Potencia de un radical.
5) Multiplicaciones y divisiones de radicales de distinto índice.
6) Radicales. Sumas y restas.
7) Racionalización.
8) Problemas con radicales.

1. Fracciones. Decimales. Calculadora.

Repaso de las operaciones con fracciones sin calculadora:

Ejercicios:

9) Realiza las siguientes operaciones con fracciones paso a paso sin calculadora:

(a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=$

(e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{4}{3}:\frac{2}{5}=$

(b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-3)}{8}=$

(f) $-\frac{10}{9}\cdot\frac{(-3)}{8}\cdot\frac{6}{25}=$

(c) $\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)=$

(g) $\dfrac{1+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{5}}=$

(d) $\dfrac{1-\frac{3}{4}}{3-10\cdot\frac{4}{15}}=$

(h) $\frac{3}{4}:3-2\cdot\left(3-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}:\frac{-4}{9}\right)=$

Uso de la calculadora para el cálculo con fracciones:

Ejercicios:

10) Realiza las operaciones del ejercicio anterior con la calculadora escribiendo en tu cuaderno las teclas empleadas. Escribe la solución usando números decimales y fracciones.

11) Realiza las siguientes operaciones con ayuda de la calculadora. Escribe la solución tanto en forma de fracción simplificada como en forma decimal:

(a) $3,13 + 8,65 - \dfrac{7}{9} =$

(b) $\dfrac{1,45 - 8 \cdot 5,53}{1 + 3,45} =$

(c) $\dfrac{10}{3} + 2 \cdot \dfrac{4,76 - \frac{3}{4}}{1 - 2,45} =$

(d) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{11}{7} + \dfrac{8}{3} =$

(e) $\dfrac{4}{3} \cdot \left(1 + 7 \cdot \dfrac{2}{3}\right) =$

(f) $-\dfrac{5}{2} - 4 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{11}{8} + 3 \cdot \dfrac{9}{2} =$

(g) $\left[3 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} \cdot 7 : \left(3 - \dfrac{9}{4}\right)\right] : \left(1 - \dfrac{11}{12}\right) =$

2. Potencias.

Repaso de las propiedades de las potencias → →

Cálculo de potencias con fracciones.

$1^n = 1$	$a^1 = a$	$a^0 = 1, (a \neq 0)$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$

Ejercicios:

12) Realiza las siguientes operaciones con fracciones paso a paso sin calculadora:

(a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 =$

(d) $\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 =$

(g) $\dfrac{9}{4} : \left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-3} =$

(b) $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 =$

(e) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}\right)^3 =$

(h) $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{-2} =$

(c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-55} \cdot \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^{30} =$

(f) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{11} : \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right]^4 =$

(i) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}\right)^{-3} =$

13) Opera y simplifica:

(a) $\left(\dfrac{3^2}{6^3}\right)^{-2} =$

(c) $-3^{-2} - (-3)^{-3} =$

(e) $\dfrac{-2^{-8} \cdot (-2)^5}{2^{-1}} =$

(b) $\dfrac{2^{-5}}{4^{-2}} \cdot \left(\dfrac{6^{-2}}{4^{-5}}\right)^{-5} =$

(d) $\dfrac{(-4x)^{-3} y^{-2}}{y^{-1}(4x)^{-1}} =$

(f) $\dfrac{x^{-2} \cdot 3y^{-3}}{6xy^{-2}} =$

14) Realiza las operaciones del ejercicio anterior con la calculadora escribiendo en tu cuaderno las teclas empleadas.

3. Radicales. Notación. Primeras propiedades.

Propiedades y ejemplos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$(a > 0 \quad \text{si} \quad n \text{ es par})$$

Ejercicios:

15) Escribe en forma de radical o potencia de exponente fraccionario según venga dado:

(a) $x^{2/5}$ (b) $y^{\frac{-1}{3}}$ (c) $z^{-5/3}$ (d) $\sqrt[4]{x^3}$

(e) $\sqrt[5]{x^{-2}}$ (f) $\sqrt{x^3}$ (g) $\sqrt{z}$ (h) $h^{\frac{-2}{3}}$

16) Calcula:

(a) $4^{1/2}$ (b) $125^{1/3}$ (c) $625^{1/4}$

(d) $(-8)^{2/3}$ (e) $64^{5/6}$ (f) $-36^{3/2}$

(g) $\sqrt{\frac{25}{16}} =$ (h) $\sqrt[3]{\frac{-8}{1000}} =$ (i) $\sqrt{1 + \frac{5}{4}} =$

17) Simplifica. Para ello expresa la raíz y el radicando de la forma más sencilla posible:

(a) $\sqrt{x^4}$ (c) $\sqrt[3]{-x^7}$ (e) $\sqrt[3]{8}$

(b) $\sqrt[5]{-64}$ (i) $\sqrt[3]{-x^6}$ (k) $\sqrt[4]{64}$

(c) $\sqrt[6]{\frac{1}{x^3}}$ (d) $\sqrt[8]{a^{-6}}$ (f) $\sqrt[10]{\frac{1}{(3y)^{15}}}$

(d) $\sqrt[12]{\frac{b}{b^5}}$ (j) $\sqrt[4]{\frac{16}{x^6}}$ (l) $\sqrt[6]{\frac{81x}{x^5y^8}}$

4. Radicales equivalentes. Potencias de radicales.

Propiedades y ejemplos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Ejercicios:

18) Revisa las soluciones de los ejercicios de la página anterior para ver si se pueden simplificar más.

19) Determina al menos dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes:

(a) $\sqrt[3]{x^2}$ (b) $\sqrt[3]{-x}$ (c) $\sqrt{x^4}$

(d) $\sqrt{6}$ (e) $\sqrt{2x}$ $(f) -2\sqrt[3]{4x^4}$

20) Determina, de forma razonada y sin usar la calculadora, cuál de los dos es mayor en cada caso:

(a) $\sqrt[4]{30}$ y $\sqrt[3]{10}$ (b) $\sqrt[3]{50}$ y $\sqrt[9]{132567}$ (c) 3 y $\sqrt[3]{30}$ (d) $\sqrt{90}$ y $\sqrt[3]{900}$

21) Opera y simplifica:

(a) $\left(\sqrt{2x^3}\right)^2$ (b) $\left(x \cdot \sqrt{2x^3}\right)^3$

(c) $2x\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{8x^2}}\right)^2$ (d) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{4x^2}{(y^2z)^2}}\right)^3$

5. Multiplicaciones y divisiones de radicales con distinto índice.

Utiliza radicales equivalentes para escribir todos los radicales en uno sólo con todos los factores bajo la raíz:

Ejercicios:

22) Escribe las siguientes expresiones con un sólo radical con todos los factores bajo la raíz:

(a) $x\sqrt{x}$

(b) $x^2 \cdot \sqrt[3]{x^5}$

(c) $2z^{2/3} \cdot \sqrt{z}$

(d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

(f) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{3x^3}}$

(g) $x \cdot x^{2/3}$

(h) $y^3 \cdot \sqrt{y}$

(i) $x \cdot \sqrt[3]{2x^4} \cdot \sqrt[5]{x}$

(j) $2a^3 \cdot \sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt{b}$

(k) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

(l) $\dfrac{4z \cdot \sqrt[3]{4z}}{\sqrt[4]{32z^3}}$

Ejercicios:

23) Simplifica las siguientes expresiones dejando la solución con un sólo radical del que se extraigan todos los factores posibles. (En un futuro, deja la solución también racionalizada – ver ejercicios siguientes)

(a) $\dfrac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{(xy)^5}}$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{x(yz^2)^4}}{\sqrt{x^2y^3z}}$

(c) $\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^3}\right)^3}{\sqrt[4]{x^9}}$

(d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^5}{\sqrt{\sqrt[4]{8}}}\cdot\sqrt{32}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt[3]{xy^4}}$

(f) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{8x^3y}\cdot\sqrt{8x^5}}}{\sqrt[4]{8x^5y}}$

(g) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5\cdot\sqrt{x^5}}{\sqrt{\sqrt[4]{x^3}}}$

(h) $\dfrac{\frac{\sqrt{2x^3}\cdot\sqrt[3]{16x^5}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}}{2x\cdot\sqrt{8x^5}}$

6. Radicales. Sumas y restas.

Ejemplos (Radicando con sumandos que pueden factorizarse. Factor común)

Ejemplos (Suma y resta de radicales)

Ejercicios:

24) Simplifica las siguientes expresiones dejando la solución con un sólo radical del que se extraigan todos los factores posibles.

(a) $\sqrt{x^3 - x^2}$

(b) $\sqrt{4x - 8}$

(c) $\sqrt{x^3 + x^2y}$

(d) $\sqrt[3]{2x^4 - x^3}$

(e) $\dfrac{6x}{\sqrt{4x^3 - 8x^2}}$

(f) $\dfrac{-3\sqrt{20x^3 + 12x^2}}{2x}$

(g) $\dfrac{12x^2 - 6xy}{\sqrt[3]{8x^4 + 8x^3y}}$

25) Simplifica las siguientes expresiones cuando sea posible:

(a) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - \sqrt{5} =$

(b) $-\dfrac{7}{2}\sqrt{75} - \dfrac{2}{3}\sqrt{27} - \sqrt{12}$

(c) $-2x\sqrt[3]{81x} - 3\sqrt[3]{24x^4} =$

(d) $3\sqrt[4]{32} - \sqrt{20} =$

(e) $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2000} + 4\sqrt{2} =$

(f) $-2\sqrt{8} - \sqrt{18} =$

7. Racionalización.

Racionalización (Tipo 1)

Ejemplos:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}} =$

Ejercicios:

26) Racionaliza las siguientes expresiones simplificando la solución cuando sea posible:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} =$

(b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} =$

(c) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}} =$

(d) $\dfrac{-10}{\sqrt[3]{4^2}} =$

(e) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{x}} =$

(f) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{3x^4}} =$

(g) $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{16x^5}} =$

(h) $\dfrac{2}{x\sqrt[5]{x^8}} =$

(i) $\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}} =$

Racionalización (Tipo 2)

Ejemplos:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-4} =$

Ejercicios:

27) Racionaliza las siguientes expresiones simplificando la solución cuando sea posible:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} =$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}} =$

(c) $\dfrac{6}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{-\sqrt{3x}+\sqrt{6x}} =$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} =$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} =$

8. Problemas con radicales.

28) Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

29) Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Determina el valor exacto.

30) Halla la diagonal de un cubo de volumen 10000 dm^3. Expresa la solución con radicales.

31) Resuelve y simplifica:

(a) $x^2 + 2x - 4 = 0$

(b) $x^2 - 2x - 2 = 0$

(c) $x^2 + 4x - 2 = 0$

(d) $3x^2 + 4x - 8 = 0$

Ficha de repaso

1. Opera sin calculadora, escribiendo los pasos intermedios:

   (a) $\frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{2}\right) =$

   (b) $\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{2 - 4 \cdot \frac{5}{12}} =$

   (c) $\frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{9} - \frac{4}{3} : \frac{2}{5} =$

   (d) $-\frac{9}{10} \cdot \frac{(-8)}{3} \cdot \frac{25}{6} =$

2. Realiza las operaciones anteriores con calculadora para comprobar tus soluciones. Escribe la solución tanto en forma decimal como en forma de fracción. Si la solución es una fracción impropia, escribe la solución también como fracción propia e impropia.

3. Opera y simplifica sin calculadora:

   (a) $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{-2}$

   (b) $-3^{-2} - (-3)^{-2}$

   (c) $\dfrac{-2^{-8} \cdot (-2)^4}{2^{-1}}$

   (d) $\dfrac{x^{-2} \cdot 3y^{-3}}{6xy^{-2}} =$

4. Escribe en forma de radical o potencia según venga dado:

   (a) $x^{2/5}$ (b) $y^{\frac{-1}{3}}$ (c) $\sqrt[5]{x^{-2}}$ (d) $\sqrt{x^3}$

5. Calcula sin calculadora: (a) $(-8)^{2/3}$ (b) $-36^{3/2}$

6. Simplifica. Para ello expresa la raíz y el radicando de la forma más sencilla posible:

   (a) $\sqrt[3]{-x^6}$

   (b) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^3$

   (c) $\left(\sqrt{2x^3}\right)^2$

   (d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{x^6}}$

   (e) $2x\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^2$

   (f) $\dfrac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{(xy)^5}}$

7. Escribe las siguientes expresiones con un sólo radical con todos los factores bajo la raíz:

(a) $x \cdot x^{2/3}$

(b) $x \cdot \sqrt[3]{2x^4} \cdot \sqrt[5]{x}$

(c) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

8. Opera y simplifica. Deja la solución también racionalizada.

(a) $\dfrac{\sqrt{16y}}{\sqrt[3]{y^5}}$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{2y^4}}{\sqrt{2^3y^5}}$

9. Simplifica las siguientes expresiones dejando la solución con un sólo radical del que se extraigan todos los factores posibles.

(a) $\sqrt{x^3 - x^2}$

(b) $\dfrac{6x}{\sqrt{4x^3 - 8x^2}}$

10. Simplifica las siguientes expresiones cuando sea posible:

(a) $\sqrt{75} - \dfrac{2}{3}\sqrt{27} - \sqrt{12}$

(b) $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2000} =$

11. Racionaliza las siguientes expresiones simplificando la solución cuando sea posible:

(a) $\dfrac{-10}{\sqrt[3]{4}} =$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} =$

(c) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{x}} =$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}} =$